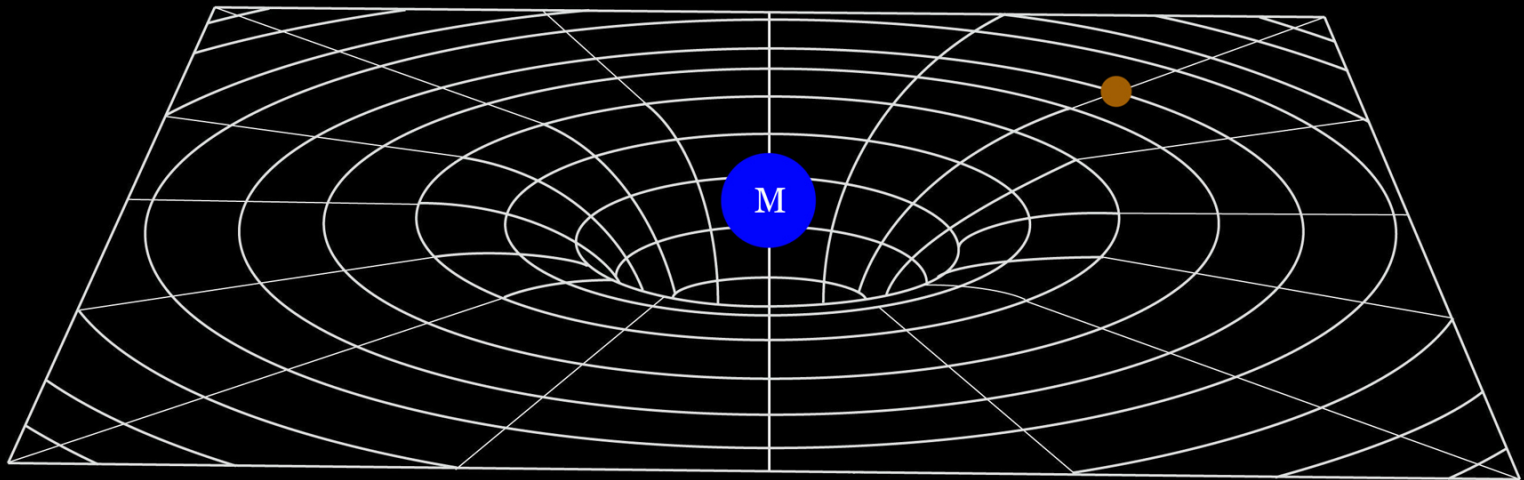


RELATIVITA' FACILE I



I - LA RELATIVITA' RISTRETTA

Luciano Ancora

RELATIVITA' FACILE

I - LA TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

Questo articolo è una sintesi tratta dal primo paragrafo del saggio: Relatività: Esposizione divulgativa di A. Einstein. Si tratta in pratica di una trascrizione delle sottolineature sul testo, da me usate per fissarne i concetti, insieme ad un paio di derivazioni matematiche tratte dai miei appunti scolastici, e poche altre considerazioni.

1. Il significato fisico delle proposizioni geometriche

La geometria di Euclide prende l'avvio da alcuni concetti fondamentali, come *piano*, *punto*, *retta*, e da alcune proposizioni semplici (*assiomi*). Le proposizioni vengono poi ricondotte a questi assiomi, cioè vengono dimostrate. Una proposizione risulterà dunque corretta (*vera*) quando è stata derivata dagli assiomi.

Ai concetti geometrici corrispondono più o meno esattamente degli oggetti in natura, e questi ultimi costituiscono senza dubbio la causa esclusiva della genesi di quei concetti. La geometria può prescindere da ciò, al fine di dare al proprio edificio la maggiore unità logica possibile.

Se aggiungiamo alle proposizioni della geometria euclidea l'unica proposizione che a due punti su un corpo praticamente rigido corrisponde sempre la stessa *distanza*, indipendentemente dai mutamenti di posizione che possiamo imprimere al corpo, allora la geometria a cui sia stata fatta quest'aggiunta può essere trattata come un ramo della fisica. Per il momento ammetteremo la *verità* delle

proposizioni geometriche; nella *Teoria della relatività generale* questa verità è limitata.

2. Il sistema delle coordinate

In base all'interpretazione fisica di distanza, siamo in grado di stabilire, per mezzo di misurazioni, la distanza fra due punti situati su un corpo rigido. Ci occorre a questo scopo un *intervallo (regolo S)* come campione unitario.

Ogni descrizione spaziale del luogo di un evento o di quello di un oggetto viene compiuta specificando su un corpo rigido (*corpo di riferimento*) il punto con il quale coincide quel dato evento od oggetto.

Usando il sistema delle coordinate cartesiane, il luogo di un evento qualsiasi sarà determinato dalla specificazione delle lunghezze delle tre coordinate (x, y, z) , determinate mediante *regoli-campione* con manipolazioni compiute secondo i metodi prescritti dalla geometria euclidea.

3. Spazio e tempo nella meccanica classica

Lo scopo della meccanica è di descrivere in qual modo i corpi mutano col *tempo* la loro posizione nello *spazio*.

Io sto al finestrino di un vagone ferroviario che viaggia con velocità uniforme, e lascio cadere una pietra sulla banchina. Prescindendo dalla resistenza dell'aria, vedo discendere la pietra in linea retta. Un pedone, che osserva il fatto dalla banchina, vede che la pietra cade a terra descrivendo un arco di parabola. Se in luogo dell'espressione *corpo di riferimento* introduciamo il concetto, utile per la descrizione matematica, di *sistema di coordinate*, siamo in grado di dire: la pietra percorre una linea retta relativamente a un sistema di coordinate rigidamente collegato al vagone mentre descrive una parabola relativamente a un sistema di coordinate rigidamente collegato al terreno

(banchina). Non esiste una traiettoria in sé, ma soltanto una traiettoria rispetto a un particolare corpo di riferimento.

Per ottenere una descrizione completa del movimento, dobbiamo specificare in che modo il corpo altera la propria posizione col *tempo*. Bisognerebbe dare una definizione di tempo tale che, i valori del tempo risultino grandezze osservabili (*risultati di misurazioni*). Immaginiamo due orologi identici in mano agli osservatori. Ciascuno di essi determinerà in quale precisa posizione del rispettivo corpo di riferimento si trova la pietra a ogni tic del proprio orologio.

4. Il sistema di coordinate galileiano

Il *principio di inerzia* della meccanica di Galileo-Newton, si enuncia: un corpo permane in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Un sistema di coordinate il cui stato di moto sia tale che il principio di inerzia risulti valido con riferimento a esso, viene detto *sistema di coordinate galileiano*. Le leggi della meccanica di Galileo-Newton sono valide soltanto per un sistema di coordinate galileiano.

5. Il principio di relatività (nel senso ristretto)

Se K è un sistema di coordinate galileiano, allora è pure galileiano ogni altro sistema di coordinate K' che si trovi, rispetto a K , in uno stato di moto traslatorio uniforme. Rispetto a K' le leggi della meccanica di Galileo-Newton sono valide esattamente come lo sono rispetto a K .

Estendendo diremo che i *fenomeni naturali* si svolgono rispetto a K' secondo le stesse precise regole generali come rispetto a K . Questo enunciato viene detto *Principio di relatività (nel senso ristretto)*.

Di fronte però al più recente sviluppo dell'*elettrodinamica* e dell'*ottica*, risultò che la meccanica classica offre una base *insufficiente* per la descrizione fisica di tutti i fenomeni naturali. A

questo punto il problema della validità del principio di relatività fu posto in discussione.

Fra tutti i sistemi di coordinate galileiani possibili, se ne scelga come corpo di riferimento uno ben determinato (K_0) che chiamiamo *assolutamente in quiete*, e chiamiamo in *moto* tutti gli altri sistemi galileiani K . Sia la banchina del nostro esempio il sistema K_0 , e il vagone ferroviario un sistema K , con delle leggi meno semplici di quelle valide rispetto a K_0 , per il fatto che K risulta in moto rispetto a K_0 .

6. Il teorema di addizione per le velocità secondo la meccanica classica

Supponiamo che il vagone ferroviario viaggi sulle rotaie con una velocità costante v , e che una persona cammini entro tale vagone nella direzione di marcia con una velocità w . Con quale velocità W la persona avanza rispetto alla banchina?

Si ha che $W = v + w$ rispetto alla banchina. Vedremo che questo risultato, il quale esprime il *teorema di addizione per le velocità* secondo la meccanica classica, non è valido nella realtà.

7. L'apparente incompatibilità fra la legge di propagazione della luce e il principio di relatività

La propagazione della luce in uno spazio vuoto ha luogo in linea retta con una velocità $c = 300000$ chilometri al secondo. Questa velocità non dipende dalla velocità del moto del corpo che emette la luce. Questa è la *legge della costanza della velocità c della luce (nel vuoto)*.

Come sistema di riferimento scegliamo ancora una volta la nostra banchina ferroviaria. Viene lanciato un raggio di luce la cui estremità avanza con velocità c rispetto alla banchina. Il nostro vagone viaggi lungo le rotaie con velocità v , nella stessa direzione e verso del raggio

di luce. La velocità di propagazione del raggio di luce relativamente al vagone sarà: $w = c - v$, inferiore a c .

Questo risultato è in conflitto col principio di relatività: la legge di propagazione della luce nel vuoto deve essere uguale tanto per il vagone ferroviario quanto per le rotaie.

Per uscire da questa contraddizione bisognerebbe abbandonare o il principio di relatività o la legge di propagazione della luce nel vuoto. Ma lo sviluppo della fisica teorica ha dimostrato che le esperienze conducono in modo inequivocabile a una teoria dei fenomeni elettromagnetici che ha per conseguenza necessaria la legge della costanza della velocità della luce nel vuoto.

A questo punto entra in campo la *Teoria della relatività ristretta*, che, analizzando i concetti fisici di tempo e di spazio, evidenzia che nella realtà non esiste la minima incompatibilità fra il principio di relatività e la legge di propagazione della luce.

8. Sul concetto di tempo nella fisica

Un fulmine ha colpito *simultaneamente* le rotaie della nostra linea ferroviaria in due punti A e B .

Per verificare la simultaneità, verrà messo un osservatore nel punto di mezzo M dell'intervallo AB , con due specchi inclinati a 90 gradi. Se l'osservatore percepisce i due bagliori del fulmine nel medesimo istante, essi saranno allora simultanei.

La definizione sarebbe corretta, se la luce viaggia lungo l'intervallo AM con la stessa velocità con cui viaggia lungo l'intervallo BM . Una verifica di quest'ipotesi sarebbe possibile se avessimo a nostra disposizione i mezzi per misurare il tempo

Per una definizione di *tempo* nella fisica, supponiamo che orologi di costruzione identica vengano collocati nei punti A , B e C della linea ferroviaria (sistema di coordinate), e vengano regolati in modo che le loro lancette abbiano *simultaneamente* le medesime posizioni. In queste condizioni intendiamo per tempo di un evento la lettura (posi-

zione delle lancette) di quello fra tali orologi che si trova nell'immediata vicinanza (spaziale) dell'evento in esame.

9. La relatività della simultaneità

Un treno molto lungo viaggia sulle rotaie con la velocità costante v e nella direzione indicata dalla figura 1.

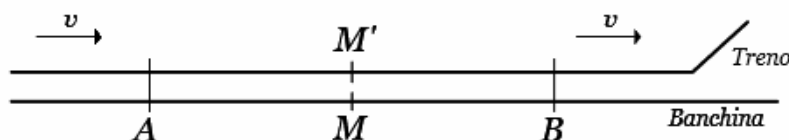


Figura 1

Due eventi (per esempio i due colpi di fulmine A e B) che sono simultanei rispetto alla banchina ferroviaria saranno tali anche rispetto al treno?

Sia M' il punto medio dell'intervallo AB sul treno in moto. Quando si verificano i bagliori del fulmine, questo punto M' coincide con il punto M , ma esso si muove verso la destra del diagramma con la velocità v del treno. L'osservatore in M' vedrà il raggio di luce emesso da B *prima* di vedere quello emesso da A . Risultato: gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa (*relatività della simultaneità*); ogni sistema di coordinate ha il suo proprio tempo particolare

10. Sulla relatività del concetto di distanza spaziale

Consideriamo due punti A' e B' sul treno che viaggia lungo la banchina con la velocità v . Determiniamo i punti A e B della banchina accanto ai quali passano i due punti A' e B' in un particolare istante t ,

giudicato dalla banchina. Se la persona che si trova sul vagone percorre in un'unità di tempo, *misurata dal treno*, l'intervallo $A'B'$, non è detto che l'intervallo AB , *misurato dalla banchina*, risulti uguale ad $A'B'$.

11. La trasformazione di Lorentz

I risultati degli ultimi due paragrafi mostrano che i concetti fisici di simultaneità e di distanza spaziale sono relativi, cioè dipendono dalle condizioni di moto del sistema a cui si riferiscono, contro le ipotesi della meccanica classica considerate.

L'apparente disaccordo incontrato al paragrafo 7, fra la legge di propagazione della luce ed il principio di relatività galileiano, viene risolto determinando l'*entità esatta* delle variazioni spazio-temporali di un evento, nel passaggio dal sistema di coordinate x, y, z, t (della banchina) al sistema x', y', z', t' (del treno).

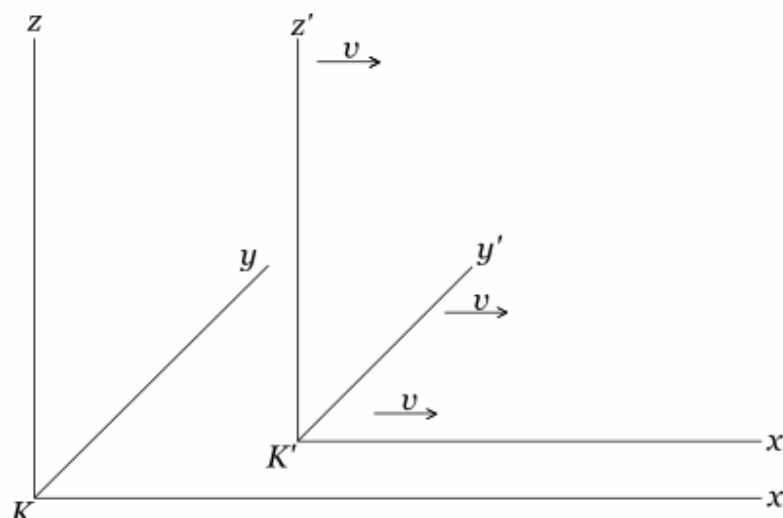


Figura 2

Quando i sistemi di coordinate son orientati nello spazio come indicato nella figura 2, tale problema viene risolto mediante le equazioni seguenti:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Questo sistema di equazioni è noto col nome di *Trasformazione di Lorentz*.

La trasformazione di Galileo si ricava dalla trasformazione di Lorentz ponendo in quest'ultima un valore infinitamente grande in luogo della velocità c della luce.

Supponiamo ora che un segnale luminoso venga lanciato lungo l'asse positivo x , e che l'eccitazione luminosa si propaghi secondo l'equazione $x = ct$, cioè con la velocità c . Se sostituiamo a x il valore ct nella prima e nella quarta equazione della trasformazione di Lorentz, otteniamo:

$$x' = ct'.$$

Questa è l'equazione cui soddisfa la propagazione della luce, riferita al sistema K' . Vediamo così che la velocità di trasmissione rispetto al corpo di riferimento K' risulta anch'essa uguale a c .

Non dobbiamo stupirci di ciò, giacché le equazioni della trasformazione di Lorentz sono proprio state derivate in conformità a questo punto di vista.

Può sembrare che il maggior merito nello sviluppo della teoria della relatività ristretta debba essere attribuito a Lorentz, invece che ad Einstein, ma non è così. E' vero che Lorentz fu il primo ad introdurre in elettrodinamica il fattore matematico

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

secondo cui, in teoria della relatività, i regoli si contraggono ed i tempi si dilatano, ma va esclusivamente ad Einstein il grande merito dell'aver combinato la trasformazione di Lorentz con il principio di relatività in una teoria che è risultata poi di grande aiuto euristico nella ricerca delle leggi generali della natura.

12. Risultati della teoria

La teoria della relatività ristretta impone quindi un riesame delle leggi della fisica. Si accetteranno le leggi fisiche che risultino identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

In *dinamica relativistica* cerchiamo una definizione della *quantità di moto* che sia *invariante per trasformazioni di Lorentz*. La definizione newtoniana: $p = m_0 v$, dove m_0 è la *massa a riposo*, va riformulata come segue:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = m_0 c \beta \gamma \quad (\beta = v / c; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}})$$

Consideriamo il quadrato di p :

$$p^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 \gamma^2 \quad (1)$$

per $v=0$ (riposo), si ha l'identità:

$$\frac{1}{1 - v^2 / c^2} - \frac{v^2 / c^2}{1 - v^2 / c^2} = 1 \quad \text{cioè} \quad \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$$

moltiplicando per $m_o^2 c^4$, si ha:

$$m_o^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_o^2 c^4$$

cioè, per la (1):

$$m_o^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = m_o^2 c^4 \quad (2)$$

Poichè la massa a riposo è costante, la grandezza $m_o^2 c^4$ risulta *invariante per trasformazioni di Lorentz*.

Se definiamo l'*energia totale relativistica*:

$$E = m_o c^2 \gamma$$

otteniamo dalla (2):

$$E^2 - p^2 c^2 = m_o^2 c^4 \quad (3)$$

che quindi risulta *invariante per trasformazioni di Lorentz*.

La *massa relativistica* m si relaziona con la massa a riposo m_o , tramite il fattore di Lorentz:

$$m = \gamma m_o$$

per cui, se $v=0$ (riposo), $p=0$, m ed m_o coincidono e la (3) si scrive, con la *massa relativistica* m :

$$E = m c^2$$

Lo stesso Einstein spiegava così questa formula: “Dalla teoria della relatività si ricava che massa ed energia sono entrambe differenti

manifestazioni della stessa cosa, un concetto non di immediata comprensione per l'uomo della strada. Inoltre, l'equazione E uguale a m moltiplicato per c elevata al quadrato, che significa che l'energia è uguale alla massa moltiplicata per il quadrato della velocità della luce, mostra che piccolissime quantità di massa possono essere trasformate in una immensa quantità di energia e viceversa. La massa e l'energia sono infatti equivalenti, secondo la formula appena citata. Questo è stato dimostrato da Cockroft e Walton nel 1932 in un esperimento”.

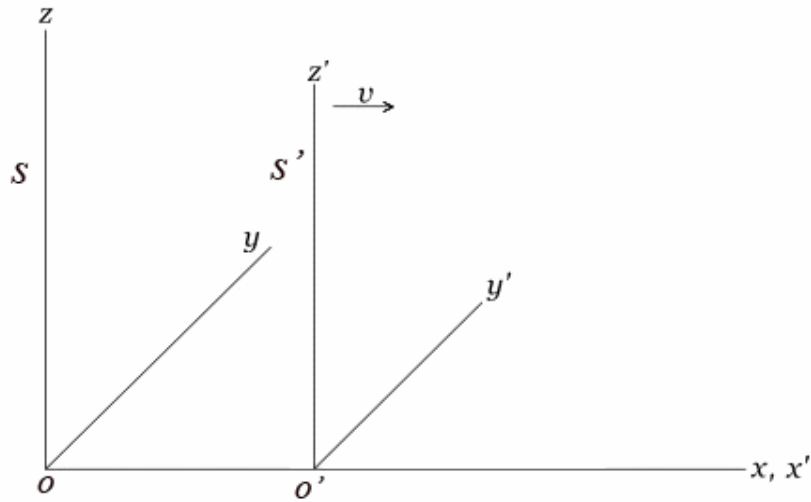
Anche qui sorgono dubbi sulla paternità di questa importante scoperta. Altri studiosi avevano già messo in relazione la massa e l'energia. La formula $E = mc^2$ era stata avanzata da Poincaré nel 1900, senza una dimostrazione. Tolver Preston, basandosi sulla stessa equazione, aveva previsto, molti anni prima, l'energia atomica e la super-conduttività. Infine, un agronomo italiano, De Pretto, aveva pubblicato la formula, due anni prima. Tuttavia, Einstein fu il primo a presentare seriamente questo risultato, come parte di una teoria più grande, derivandolo dalla sua Teoria della Relatività.

La mia opinione personale è che la formula più famosa della scienza, già intuita da diversi ricercatori in quegli anni che sconvolsero la fisica, sia stata tempestivamente adattata da Einstein alla sua nascente Teoria della Relatività (avendo egli intuito che da essa derivava) con un procedimento di dimostrazione eseguito a ritroso, attraverso sapienti manipolazioni delle grandezze fisiche coinvolte.

APPENDICE

13. Derivazione della Trasformazione di Lorentz

Cerchiamo una trasformazione per cui la velocità della luce c risulti indipendente dal moto dell'osservatore.



Una sorgente luminosa, ferma nell'origine O di S , emette un impulso di luce al tempo $t=0$. Il fronte d'onda sferico raggiungerà il punto $P(x,y,z)$ al tempo $t = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}/c$ per cui, in S , l'equazione del fronte d'onda sferico è:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1)$$

Al tempo $t=0$, le origini O ed O' coincidano, e sia anche $t'=0$. Allora, per un osservatore in S' , l'equazione del fronte d'onda sarà:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2)$$

Nel sistema S' , in moto come in figura, per la trasformazione di Galileo, si hanno:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t \quad (3)$$

che sostituite nella (2) danno:

$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad (4)$$

che è in disaccordo con la (1).

Perchè sia valido il principio della costanza di c , deve esistere una trasformazione che si riduca a quella di Galileo per v/c tendente a zero e che trasformi esattamente la (2) nella (1).

La trasformazione del tempo $t' = t$ deve essere modificata, per eliminare i termini indesiderati $-2xvt + v^2t^2$.

Proviamo con la trasformazione:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t + fx \quad (5)$$

dove f è una costante da determinare. Allora la (2) diventa:

$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2ftx + c^2f^2x^2 \quad (6)$$

Osserviamo che i termini con xt si elidono se si pone:

$$f = -v/c^2$$

Con questo valore di f , la (6) diventa:

$$x^2(1 - v^2/c^2) + y^2 + z^2 = c^2t^2(1 - v^2/c^2)$$

che può essere ricondotta alla (1), eliminando il fattore di scala indesiderato $(1 - v^2/c^2)$. Ciò si ottiene modificando la trasformazione di prova (5) nel modo seguente:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Questa è la *Trasformazione di Lorentz* che si cercava.

Essa si riduce a quella di Galileo per v/c tendente a 0, e sostituita nella (2) dà:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

esattamente come richiesto.

